Mögliche Deutungen quadratischer Fließbedingungen bei Isotropie und Anisotropie

A. Troost und J. Betten

Mitteilungen aus dem Institut für Werkstoffkunde
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **30 a**, 996–1000 [1975]; eingegangen am 11. April 1975)

Physical Interpretations of Isotropic and Anisotropic Yield-Conditions

The paper introduces shear stress quantities, which are the difference of two stress tensors, the actual one and one produced by rotating the axes. This quantities have physical significance. In the vectorial representation in the principal stress space and the principal shear stress space the paper give some interesting relations. The authors observe that Hill's anisotropic yield criterion can be derived from their shear stress quantities by introducing a measure tensor and gave a physical explanation to Hill's condition.

1. Einleitung

Während man mechanische Stoffeigenschaften meist im einachsigen Grundversuch ermittelt, ist die Betriebsbelastung eines Bauteils überwiegend mehrachsig. Daher muß der Beanspruchungsgrad des Bauteils (Werkstoffanstrengung) im allgemeinen auf eine (meist) fiktive einachsige Vergleichsspannung σ äquivalenter Anstrengung zurückgeführt werden, um ihn an den Stoffeigenschaften messen zu können. Das gelingt je nach Werkstoff und Belastungsart durch eine mehr oder weniger zufriedenstellende analytische Wiedergabe des experimentellen Befundes oder formale Ansätze auf der Basis von Anstrengungshypothesen:

$$\sigma = \sigma(\sigma_{ij}) \tag{1}$$

(σ_{ij} Spannungstensor). Als Spezialfall wird damit der Fließbeginn durch das Fließkriterium (Fließbedingung) beschrieben:

$$\sigma = \sigma_F \tag{2}$$

(σ_F Fließgrenze oder Fließspannung des einachsigen Grundversuchs). Geht man bei der Aufstellung einer Anstrengungshypothese von einer für die Werkstoffanstrengung als verantwortlich angenommenen mechanischen Kenngröße aus, so ist von vornherein die physikalische Deutung gegeben. Beispielsweise weisen die Begriffe Normalspannungshypothese, Schubspannungshypothese oder Gestaltänderungsenergiehypothese darauf hin, daß als maßgebliche mechanische (physikalische) Kenngröße (für die Werkstoffanstrengung) die größte Normalspannung, die größte Schubspannung oder die elastische Gestaltänderungsenergiedichte zugrunde gelegt wird.

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr.-Ing. J. Betten, Institut für Werkstoffkunde, RWTH Aachen.

Umgekehrt können durch mathematische Überlegungen Anstrengungsbedingungen formal oder von der experimentellen Erfahrung ausgehend aufgestellt werden. Trotzdem wird man versuchen, auch den mathematischen Ansatz physikalisch zu deuten.

2. Bisherige Deutungen der Fließbedingung nach Mises

Die Werkstoffanstrengung wird bei duktilen und „isotropen" Metallen vielfach nach dem zunächst rein formalen Ansatz

$$\sigma^2 = \tfrac{3}{2}\, \sigma_{ij}'\, \sigma_{ij}' \tag{3}$$

(σ_{ij}' Spannungsdeviator) bestimmt, der mit der von Mises[1] algebraisch angegebenen quadratischen Fließbedingung seiner Theorie des plastischen Potentials formalidentisch ist. Vergleicht man den Ansatz (3) mit der zweiten Deviatorinvariante

$$I_2' = \tfrac{1}{2}\, \sigma_{ij}'\, \sigma_{ij}', \tag{4}$$

so ergibt sich für die Mises-Bedingung (3) auch die Form

$$I_2' = \tfrac{1}{3}\, \sigma^2 . \tag{5}$$

Durch die Schreibweise (5) wird ebenfalls deutlich, daß die Misessche Theorie nur für isotropes Werkstoffverhalten aufgestellt ist. Außerdem war der Ansatz (3) von Mises nur zur Beschreibung des plastischen Fließens für $\sigma = \sigma_F$ vorgesehen. Er gilt jedoch in brauchbarer Näherung formal auch für die Anstrengung σ bei rein elastischen Verformungsanteilen ($\sigma \leqq \sigma_F$) bzw. für elastisch-plastische Gesamtverformung ($\sigma \geqq \sigma_F$), wie der Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigt. Eine Deutung gelingt unter der Annahme, daß die maßgebliche physikalische Kenngröße die Gestaltänderungsenergiedichte ist, und zwar nach Hencky [2] für den elastischen Bereich nur in Verbindung mit dem Hookeschen Gesetz und nach [3] für den elastisch-plastischen Bereich nur in Verbindung mit den Prandtl-Reuss-Stoffgleichungen.

Eine weitere Deutungsmöglichkeit ist folgendermaßen gegeben. Im Hauptachsensystem ($\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}}$) des Spannungstensors σ_{ij} — zur Abkürzung werde vom „Hauptspannungsraum $\mathfrak{S}$" gesprochen — trifft man auf den Oktaederebenen mit dem Normaleneinsvektor

$$n_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \,(\pm 1;\, \pm 1;\, \pm 1) \tag{6}$$

gemäß der linearen Abbildung

$$s_{\mathrm{i}} = \sigma_{ij}\, n_j \tag{7}$$

den Oktaederspannungsvektor s_{i} mit der Normalkoordinate (Oktaedernormalspannung)

$$s_{\mathrm{n}}(\sigma_{ij}) = \tfrac{1}{3}\, \sigma_{ii} \tag{8 a}$$

und der Tangentialkoordinate (Oktaederschubspannung)

$$s_{\mathrm{t}}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\,(\sigma_{ii})^2\right]^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\sigma_{ij}'\,\sigma_{ij}')^{1/2} \tag{8 b}$$

an, d. h.

$$s_{\mathrm{t}}(\sigma_{ij}) \equiv s_{\mathrm{t}}(\sigma_{ij}'):$$

Der Spannungsdeviator σ_{ij}', dem für das plastische Fließen eine besondere physikalische Bedeutung zukommt, hat dieselbe Oktaederschubspannung wie der vollständige Spannungstensor σ_{ij}, da er von diesem nur um den Kugeltensor $\frac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$ abweicht.

Der Vergleich der Beziehungen (4) und (8 b) ergibt den Zusammenhang zwischen der zweiten Deviatorinvariante I_2' und der Oktaederschubspannung s_{t} im Raum $\mathfrak{S}$:

$$I_2' = \tfrac{3}{2}\, s_{\mathrm{t}}^2 . \tag{9}$$

Gleichung (9) beinhaltet eine physikalische Bedeutung der Invariante I_2', so daß auch die Oktaederschubspannung s_{t} als maßgebliche mechanische (physikalische) Kenngröße der Bedingung (5) zugrunde gelegt wurde [4, 5]:

$$\sigma^2 = \tfrac{9}{2}\, s_{\mathrm{t}}^2 .$$

Diese Deutungsmöglichkeit beruht demnach auf Gleichgewichtsbedingungen (Statik), während in [2, 3] Stoffgleichungen (Statik und Kinematik) benutzt werden müssen.

3. Deutung für die Fließbedingung nach Hill

Gegenüber diesen physikalischen Deutungen der Anstrengungs- bzw. Fließbedingung für isotrope Werkstoffe ist für anisotropes Verhalten bisher noch keine vergleichbare Interpretation angegeben worden. Sie gelingt jedoch in analoger Weise für orthogonale Anisotropie, wenn man vom quadratischen plastischen Potential nach Hill [6] ausgeht.

Die damit verbundene Fließbedingung lautet, abweichend von der üblichen Darstellung [6] in den Hauptwerten des Spannungstensors und mit dimensionslosen Anisotropiekoeffizienten $a_{\mathrm{I}}, a_{\mathrm{II}}, a_{\mathrm{III}}$ angeschrieben,

$$2\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2} = a_{\mathrm{I}}^2\,(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + a_{\mathrm{II}}^2\,(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 + a_{\mathrm{III}}^2\,(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 . \tag{10}$$

In Gl. (10) hat $\sigma_{\mathrm{F}}{}^*$ lediglich die Bedeutung einer beliebigen Normierungsgröße von der Dimension einer Spannung.

Die hier vorgeschlagene Deutung der Hillschen Fließbedingung (10) wird möglich, wenn man (neue) Spannungsgrößen τ_{ij} formal definiert [7, 8] und für dessen Hauptachsensystem ($\tau_{\mathrm{I}}, \tau_{\mathrm{II}}, \tau_{\mathrm{III}}$; „Hauptschubspannungsraum $\mathfrak{T}$") in gleicher Weise vorgeht, wie unter Ziff. 2 für den Raum $\mathfrak{S}$ geschildert wurde. Da Gl. (10) mit $a_{\mathrm{I}} = a_{\mathrm{II}} = a_{\mathrm{III}} = 1$ in die Mises-Bedingung übergeht, gilt diese Deutung auch für Isotropie.

3.1. *Eigenschaften der Spannungsgrößen τ_{ij}*

Es seien τ_{ij} Spannungsgrößen, die (konsequent) nur Schubspannungen sind mit dem Bildungsgesetz [7, 8]:

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{ij} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{kl} - \sigma_{mn}),\\ &k = i+1;\quad l = j+1\\ &m = i+2;\quad n = j+2 \end{aligned}\right\} i, j = 1, 2, 3 \ \text{zyklisch.} \tag{11}$$

Beschränkt man sich im weiteren auf Hauptschubspannungen

$$\tau_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}});\ \tau_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}});\ \tau_{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}), \tag{12}$$

so lautet das Koordinatenschema für (11):

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\mathrm{III}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

mit der Invarianten

$$I_1{}^* = \tau_{ii} = \tau_{\mathrm{I}} + \tau_{\mathrm{II}} + \tau_{\mathrm{III}} \equiv 0 \tag{14}$$

und zwei weiteren charakteristischen skalaren Größen:

$$I_2{}^* = -(\tau_I \tau_{II} + \tau_{II} \tau_{III} + \tau_I \tau_{III}) \qquad (15\,a)$$

bzw. wegen (14)

$$I_2{}^* = \tfrac{1}{2}(\tau_I^2 + \tau_{II}^2 + \tau_{III}^2) = \tfrac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}{}^* \qquad (15\,b)$$

und

$$I_3{}^* = \mathrm{Det}(\tau_{ij}) = \tau_I \tau_{II} \tau_{III}\,. \qquad (16)$$

Die durch (11) definierten Spannungsgrößen haben „Deviatoreigenschaften", da die Invariante $I_1{}^*$ gemäß Gl. (14) identisch verschwindet. Daher wird auch die Schreibweise (15 b) für die zweite skalare Größe (15 a) möglich. Setzt man Gl. (12) in Gl. (15 b) ein und vergleicht das Ergebnis mit der zweiten Invarianten I_2' des Spannungsdeviators σ_{ij}' gemäß Gl. (4), so hat man den Zusammenhang

$$I_2{}^* = \tfrac{3}{4}\, I_2' - \tfrac{1}{4}\,(\sigma_{12} + \sigma_{23} + \sigma_{31})^2 \qquad (17\,a)$$

bzw. im Hauptachsensystem.

$$I_2{}^* = \tfrac{3}{4}\, I_2'\,. \qquad (17\,b)$$

Analog zum Spannungstensor σ_{ij} und der Transformation (7) vermitteln die Spannungsgrößen τ_{ij} einen Schubspannungsvektor

$$t_i = \tau_{ij}\, n_j \qquad \mathbf{(18)}$$

für ein Flächenelement dF mit dem Normaleneinsvektor n_i. Beispielsweise ergibt sich mit Gl. (18), daß der Vektor t_i für die Oktaederebenen im Raum $\mathfrak{T}$,

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\tau_I;\ \tau_{II};\ \tau_{III})\,, \qquad (19)$$

die Normalkoordinate

$$t_n = t_i\, n_i = \tau_{ij}\, n_j\, n_i = \tau_I\, n_I^2 + \tau_{II}\, n_{II}^2 + \tau_{III}\, n_{III}^2\,, \qquad (20)$$

bzw. mit Gl. (14)

$$t_n = \tfrac{1}{3}\, I_1{}^* \equiv 0 \qquad (21)$$

und die Tangentialkoordinate

$$t_t = \sqrt{t_i\, t_i - t_n{}^2} \qquad (22\,a)$$

bzw. wegen Gl. (21)

$$t_t = \sqrt{t_i\, t_i} \qquad (22\,b)$$

hat. Nach Gl. (15 b) gilt somit

$$I_2{}^* = \tfrac{3}{2}\, t_t{}^2\,. \qquad (23)$$

* $I_2{}^*$ ist keine Invariante; sie läßt sich mit Gl. (4) und Definition (11) in einen invarianten und nichtvarianten Anteil aufspalten. Der nichtinvariante Anteil verschwindet allerdings im Hauptachsensystem.

Die zweite skalare Größe $I_2{}^*$ hat demnach wie I_2' eine physikalische Bedeutung, da t_t die Oktaederschubspannung im Raum $\mathfrak{T}$ ist: Zwischen Gl. (9) und Gl. (23) besteht eine formale Analogie.

3.2. Spannungsgrößen und Anisotropie

Orthogonale Anisotropie kann durch eine Transformation der Spannungsgrößen (11) bzw. (13) gemäß

$${}^A\tau_{ij} = a_{ik}\, \tau_{kj} \qquad (24)$$

ausgedrückt werden mit dem „Verzerrungsfaktor"

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_I & 0 & 0 \\ 0 & a_{II} & 0 \\ 0 & 0 & a_{III} \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

der den Anisotropieeinfluß erfaßt. Im isotropen Sonderfall stimmt a_{ij} mit dem Kronecker-Delta δ_{ij} überein. In Anlehnung an den Misesschen Ansatz (3) bzw. (5) in Verbindung mit (2) folgt unter Berücksichtigung von (15 b) und (17) formal die Fließbedingung anisotroper Werkstoffe:

$$(\sigma_F{}^*/2)^2 = \tfrac{1}{2}\, {}^A\tau_{ij}\, {}^A\tau_{ij} \qquad (26\,a)$$

bzw. mit der Transformation (24)

$$(\sigma_F{}^*/2)^2 = \tfrac{1}{2}\, a_{ik}\, \tau_{kj}\, a_{il}\, \tau_{lj}\,. \qquad (26\,b)$$

Wegen (25) lautet Gl. (26 b) in Koordinatenschreibweise:

$$\sigma_F^{*2} = 2\,(a_I^2\, \tau_I^2 + a_{II}^2\, \tau_{II}^2 + a_{III}^2\, \tau_{III}^2)\,. \qquad (26\,c)$$

Ersetzt man in Gl. (26 c) die Hauptschubspannungen durch Hauptnormalspannungen gemäß (12), so erhält man unmittelbar die Hill-Bedingung in der Form (10).

Analog zur Transformation (18) liegt dem anisotropen Fall die lineare Abbildung

$${}^A t_i = {}^A\tau_{ij}\, n_j \qquad (27)$$

zugrunde. Beispielsweise besitzt der Spannungsvektor ${}^A t_i$ für die Oktaederebenen im Vergleich zu (19),

$${}^A t_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(a_I\, \tau_I;\ a_{II}\, \tau_{II};\ a_{III}\, \tau_{III})\,, \qquad (28)$$

die Normalkoordinate (Oktaedernormalspannung)

$${}^A t_n = {}^A t_i\, n_i = {}^A\tau_{ij}\, n_j\, n_i = a_I\, \tau_I\, n_I^2 + a_{II}\, \tau_{II}\, n_{II}^2 + a_{III}\, \tau_{III}\, n_{III}^2 \qquad (29\,a)$$

bzw.

$${}^A t_n = \tfrac{1}{3}\, {}^A\tau_{ii} = \tfrac{1}{3}\,(a_I\, \tau_I + a_{II}\, \tau_{II} + a_{III}\, \tau_{III}) \qquad (29\,b)$$

und die Tangentialkoordinate (Oktaederschubspannung)

$${}^A t_t = \sqrt{{}^A t_i\, {}^A t_i - {}^A t_n{}^2} \qquad (30\,a)$$

bzw.

$$ {}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{t}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a_{\mathrm{I}}^2\,\tau_{\mathrm{I}}^2 + a_{\mathrm{II}}^2\,\tau_{\mathrm{II}}^2 + a_{\mathrm{III}}^2\,\tau_{\mathrm{III}}^2 - a_I\,\tau_{\mathrm{I}}\,a_{\mathrm{II}}\,\tau_{\mathrm{II}} - a_{\mathrm{III}}\,\tau_{\mathrm{III}}\,a_I\,\tau_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{II}}\,\tau_{\mathrm{II}}\,a_{\mathrm{III}}\,\tau_{\mathrm{III}}}\,. \tag{30 b} $$

Im Gegensatz zum isotropen Fall (21) ist die Oktaedernormalspannung (29) bei Anisotropie wegen $a_{\mathrm{I}} \neq a_{\mathrm{II}} \neq a_{\mathrm{III}}$ von Null verschieden!

Da die Norm des Oktaederspannungsvektors (28) durch

$$ \sqrt{{}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}}\,{}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{a_{\mathrm{I}}^2\,\tau_{\mathrm{I}}^2 + a_{\mathrm{II}}^2\,\tau_{\mathrm{II}}^2 + a_{\mathrm{III}}^2\,\tau_{\mathrm{III}}^2} \tag{31 a} $$

bzw. mit Gl. (12) durch

$$ \sqrt{{}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}}\,{}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{a_{\mathrm{I}}^2\,(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + a_{\mathrm{II}}^2\,(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 + a_{\mathrm{III}}^2\,(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2} \tag{31 b} $$

gegeben ist, findet man in den Formen (31 a) und (31 b) die Hill-Bedingung (10) bzw. (26 c) wieder. So läßt sich die quadratische Fließbedingung bei Orthotropie kurz nach

$$ \sigma_{\mathrm{F}}^{*2} = 6\,{}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}}\,{}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}} \tag{31 c} $$

schreiben. Analog zu Gl. (31 c) lautet die Mises-Bedingung

$$ \sigma_{\mathrm{F}}{}^2 = 6\,t_{\mathrm{i}}\,t_{\mathrm{i}}\,, \tag{32} $$

wenn in Gl. (22 b) die Beziehungen (2), (5) und (17) eingesetzt werden.

Damit wird eine physikalische (und unmittelbar auch geometrisch gegebene) Deutung der Fließbedingung nach Hill und ihres Sonderfalls nach Mises möglich:

Maßgeblich für das plastische Fließen sowohl orthotroper als auch isotroper Werkstoffe ist der Betrag des Schubspannungsvektors, der zur Oktaederebene im Hauptachsensystem (τ_I, τ_{II}, τ_{III}) von formal gebildeten „Spannungsgrößen τ_{ij}" gehört. Im anisotropen Fall sind die Tangentialkoordinate (Oktaederschubspannung) dieses Vektors und seine Normalkoordinate (Oktaedernormalspannung) von Null verschieden, während im isotropen Sonderfall der Schubspannungsvektor in die Oktaederebene fällt.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in den Tab. 1 und 2 zusammengestellt, um die Analogien zwischen den Räumen „$\mathfrak{S}$" und „$\mathfrak{T}$" übersichtlich hervorzuheben. Weiterhin wird ersichtlich, daß die Darstellung im Raum „$\mathfrak{T}$" Vorteile bieten kann, insbesondere zur physikalischen Deutung der Hill-Bedingung!

Zur Vervollständigung enthält Tab. 3 die Richtungskosinus der Oktaederspannungsvektoren für Isotropie und Anisotropie.

4. Zusammenfassung

Beim Aufstellen einer Anstrengungshypothese bzw. eines Fließkriteriums kann man von einer für das plastische Fließen als maßgeblich angesehenen mechanischen Kenngröße ausgehen, so daß von vornherein die physikalische Deutung gegeben ist. Im Gegensatz dazu lassen sich durch rein mathematische Überlegungen Anstrengungsbedingungen formal oder vom experimentellen Befund ausgehend aufstellen. Jedoch wird man auch dann nach Möglichkeiten einer physikalischen Deutung des Ansatzes suchen.

Im vorliegenden Beitrag wird eine physikalische Deutung der Hillschen Fließbedingung bei orthogonaler Anisotropie der mechanischen Stoffeigen-

Tab. 1. Oktaederspannungen.

Oktaeder Spannungen	Hauptnormalspannungsraum **Isotropie**	**Anisotropie**	Hauptschubspannungsraum **Isotropie**	**Anisotropie**
Spannungsvektor	$s_i = (s_n, s_t)$	${}^{\mathrm{A}}s_{\mathrm{i}} \equiv s_{\mathrm{i}}$	$t_{\mathrm{i}} = (t_{\mathrm{n}}, t_{\mathrm{t}})$	${}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{i}} = ({}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{n}}, {}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{t}})$
Normalspannung	$s_{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$	${}^{\mathrm{A}}s_{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$	$t_{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}\tau_{ii} \equiv 0$	${}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}{}^{\mathrm{A}}\tau_{ii}$
Schubspannung	$s_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'}$	$s_{\mathrm{t}} \equiv {}^{\mathrm{A}}s_{\mathrm{t}}$	$t_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{1}{3}\tau_{ij}\tau_{ij}}$	${}^{\mathrm{A}}t_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{1}{3}{}^{\mathrm{A}}\tau_{ij}\,{}^{\mathrm{A}}\tau_{ij}}$

Tab. 2. Plastisches Potential und Fließbedingungen im σ_{ij}- und τ_{ij}-Koordinatensystem bei Isotropie und Anisotropie.

	σ_{ij}-Koordinatensystem Isotropie	Anisotropie	τ_{ij}-Koordinatensystem Isotropie	Anisotropie
Koordinaten	σ_{ij} bzw. $\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$		$\tau_{ij}=\frac{1}{2}(\sigma_{kl}-\sigma_{mn})$ $k=i+1;\ l=j+1$ $m=i+2;\ n=j+2$	${}^{A}\tau_{ij}=a_{ik}\,\tau_{kj}$ $a_{ij}=\begin{pmatrix} a_{I} & 0 & 0 \\ 0 & a_{II} & 0 \\ 0 & 0 & a_{III} \end{pmatrix}$
Transformationsgesetz	$s_i=\sigma_{ij}\,n_j$		$t_i=\tau_{ij}\,n_j$	${}^{A}t_i={}^{A}\tau_{ij}\,n_j$
Plastisches Potential	$F=\frac{1}{2}\sigma_{ij}'\,\sigma_{ij}'$	Hill	$F=\frac{1}{2}\tau_{ij}\,\tau_{ij}$	$F=\frac{1}{2}\,{}^{A}\tau_{ij}{}^{A}\tau_{ij}$
Fließbedingung				
a) Allgemeine Schreibweise	$\sigma_F^2=\frac{3}{2}\sigma_{ij}'\,\sigma_{ij}'$	Hill	$\sigma_F^2=2\,\tau_{ij}\,\tau_{ij}$	$\sigma_F^{*2}=2\,{}^{A}\tau_{ij}\,{}^{A}\tau_{ij}$
b) in Oktaederorientierung	$\sigma_F^2=\frac{9}{2}s_i\,s_i-\frac{1}{2}\sigma_{kk}^2$		$\sigma_F^2=6\,t_i\,t_i$	$\sigma_F^{*2}=6\,{}^{A}t_i\,{}^{A}t_i$

Tab. 3. Richtungskosinus der Oktaederspannungsvektoren.

	σ_{ij}-Koordinatensystem Isotropie	Anisotropie	τ_{ij}-Koordinatensystem Isotropie	Anisotropie
allgemein	$\cos(s_i, n_j)=\dfrac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ij}\,\sigma_{ij}}}$		$\cos(t_i, n_j)=\dfrac{\tau_{ij}}{\sqrt{\tau_{ij}\,\tau_{ij}}}$	$\cos({}^{A}t_i, n_j)={}^{A}\tau_{ij}/\sqrt{{}^{A}\tau_{ij}\,{}^{A}\tau_{ij}}$
nach Hauptachsen orientiert	$\cos(s_i, \sigma_I)=\dfrac{\sigma_I}{\sqrt{\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2}}$		$\cos(t_i, \tau_I)=\sqrt{2}\,\tau_I/\sigma_F$	$\cos({}^{A}t_i, \tau_I)=\sqrt{2}\,a_I\,\tau_I/\sigma_F^*$
	$\cos(s_i, \sigma_{II})=\dfrac{\sigma_{II}}{\sqrt{\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2}}$		$\cos(t_i, \tau_{II})=\sqrt{2}\,\tau_{II}/\sigma_F$	$\cos({}^{A}t_i, \tau_{II})=\sqrt{2}\,a_{II}\,\tau_{II}/\sigma_F^*$
	$\cos(s_i, \sigma_{III})=\dfrac{\sigma_{III}}{\sqrt{\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2}}$		$\cos(t_i, \tau_{III})=\sqrt{2}\,\tau_{III}/\sigma_F$	$\cos({}^{A}t_i, \tau_{III})=\sqrt{2}\,a_{III}\,\tau_{III}/\sigma_F^*$

schaften vorgeschlagen. Es wird gezeigt, daß für das orthotrope plastische Fließen der Betrag des Schubspannungsvektors ${}^{A}t_i$ als maßgeblich angesehen werden kann, der zur Oktaederebene im *Hauptschubspannungsraum* (τ_I, τ_{II}, τ_{III}) gehört und sowohl eine Tangentialkoordinate (Oktaederschubspannung) als auch eine Normalkoordinate (Oktaedernormalspannung) besitzt. Im isotropen Sonderfall dagegen weist er im Hauptschubspannungsraum nur eine Tangentialkoordinate (Oktaederschubspannung) auf. Diese Koordinaten und die zugehörigen Richtungskosinus werden berechnet.

In der hier sowohl für den Spannungstensor σ_{ij} als auch für formal gebildete Spannungsgrößen τ_{ij} bei isotropem und anisotropem Stoffverhalten benutzten *einheitlichen formalen Schreibweise* sind die Untersuchungsergebnisse in Tabellen einander gegenübergestellt.

[1] R. v. Mises, Nachrichten d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch., Göttingen, Math. phys. Klasse 1913, S. 582/592; Z. angew. Math. u. Mech. **8**, 161 [1928].

[2] H. Hencky, Z. angew. Math. u. Mech. **5**, 116 [1925].

[3] A. Troost, Naturwiss. **56**, 559 [1969].

[4] M. Roš u. A. Eichinger, EMPA-Bericht 34, Zürich 1927.

[5] A. Nádai, J. Appl. Phys. **8**, 205 [1937].

[6] R. Hill, Proc. Roy. Soc. A **193**, 281 [1948]; R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, London 1950.

[7] A. Troost u. J. Betten, Z. Naturforsch. **28 a**, 319 [1973].

[8] J. Betten, Archiv für das Eisenhüttenwesen **43**, 471 [1972].